物　　　　理　（3問題　100点）

物理問題　Ⅰ

次の文章を読んで，$\boxed{\quad\quad}$ に適した式を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{\quad\quad}}$ は，すでに $\boxed{\quad\quad}$ で与えられたものと同じ式を表す。また，**問1**，**問2**では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

以下の設問では，地球は半径 R の球であり，密度は一様に分布していると考えてよい。また，地球の質量を M，万有引力定数を G とし，地球の自転の影響，摩擦，および空気の抵抗は無いものとする。

（1）　図1のように，地球の中心Oを通って直線状に掘られたトンネルを考える。トンネルは十分に細く，トンネルを掘ったことによる質量の変化は無視できるものとする。トンネル内の任意の1点P（$\mathrm{OP}=r$）で質量 m の質点に働く重力は，Oを中心とした半径 r の球の質量が中心Oに集まったとして，それと質点との間の万有引力に等しく，半径 r の球の外側の部分は，この点での重力には無関係であることが知られている。したがって，トンネル内の1点Pにおいて質点に働く重力の大きさは，m，M，R，r，G を使って $\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。この力による質点の運動は単振動であり，その周期は $\boxed{\text{イ}}$ で与えられる。

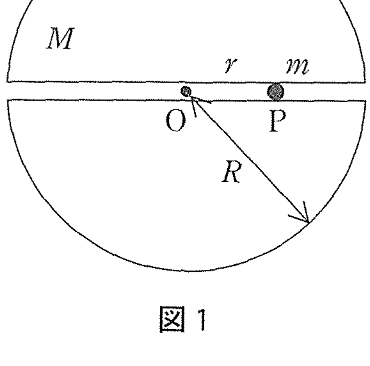

図1

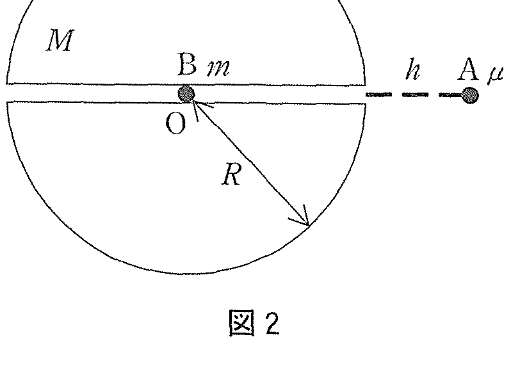

図2

（2） 次に，**図2**のように，トンネルを通る直線にそって，地表からの高さが h の点に質量 μ の質点Aを静かに置き，静止した状態からトンネルに落下させ，中心Oに静止している質量 m の質点Bに衝突させる。質点Aがトンネルに入る瞬間の速さは $\boxed{\text{ウ}}$ で，中心Oに到達する直前の速さは $\boxed{\text{エ}}$ である。衝突は弾性衝突であるとすると，衝突直後の質点Aの速さは $\boxed{\text{オ}}$ ，質点Bの速さは $\boxed{\text{カ}}$ となる。衝突後，質点Bは反対側の地表に達した。

問1 $h=0$ とした場合に，この後質点Bが無限の遠方に飛び去るために必要な $\dfrac{\mu}{m}$ の値の範囲を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

（3） 今度は，**図3**のように，地球の中心Oから $\dfrac{R}{2}$ だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心Oからの距離が r で，トンネルの中心O′から x だけ離れたトンネル内のP点にある質量 m の質点に働く重力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ なので，その質点に働くトンネルにそった方向の力の大きさは，m，M，R，x，G を使って $\boxed{\text{キ}}$ で与えられる。したがって，地表で静止した状態からトンネルを通って反対側の地表に出るまでにかかる時間は $\boxed{\text{ク}}$ である。

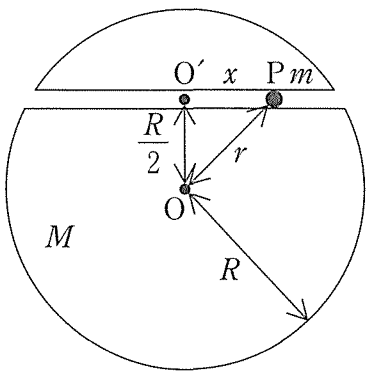

図3

（4）　次に，図4のように，質量 μ の質点Aをトンネルの端点に静かに置き，静止した状態からトンネルに落とし，トンネルの中心 O′ に静止している質量 m の質点Bに衝突させた。衝突は弾性衝突であるとすると，質点Bが反対側の地表に達するための条件は $\mu \geqq$ $\boxed{\text{ケ}}$ で与えられる。また，質点Bが地表から飛び出した後，再び地表にもどってくるための条件は $\mu <$ $\boxed{\text{コ}}$ となる。

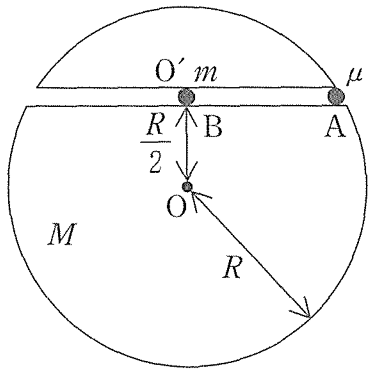

図4

問 2　地表から飛び出した瞬間の質点Bの運動エネルギーが，そのときの位置エネルギーの大きさ $\dfrac{GMm}{R}$ の半分である場合を考える。地表を飛び出した後の質点Bの運動では，面積速度が一定となる。質点Bが地球から最も離れた地点に達したときの中心Oからの距離を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

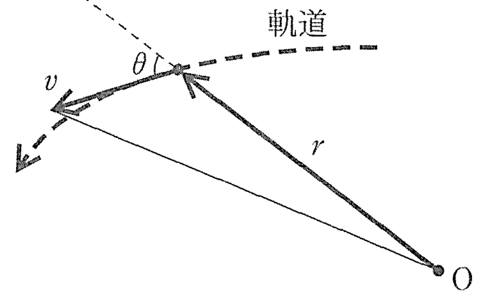

図5

なお，図5のように質点が地球の中心Oから距離 r の位置を速さ v で運動している場合，その面積速度は $\dfrac{1}{2}rv\sin\theta$ で与えられる。ただし，θ は地球の中心Oから軌道上の質点に向かう方向と速度のなす角度である。

物理問題　II

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式か値を，それぞれの解答欄に記入せよ。**問1**，**問2**については，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

なお，以下の設問では極板等はすべて真空中にあり，真空の誘電率を ε_0 とする。コンデンサーの極板は極板間距離に比べて十分大きく，極板端での電場の乱れは無視できる。導線や導体の抵抗は無視できるものとし，導線はしなやかで軽く，質量が無視できるとともに，極板の動きに影響を与えないものとする。また，重力加速度を g とする。

(1)　図1のように，極板①と極板②からなる平行板コンデンサーがある。極板①は固定されており，極板②は左右に滑らかに動かすことができる。コンデンサーの極板の面積を S とし，極板①には電荷 $-q$ が，極板②には電荷 $+q$ が蓄えられているものとする($q > 0$)。

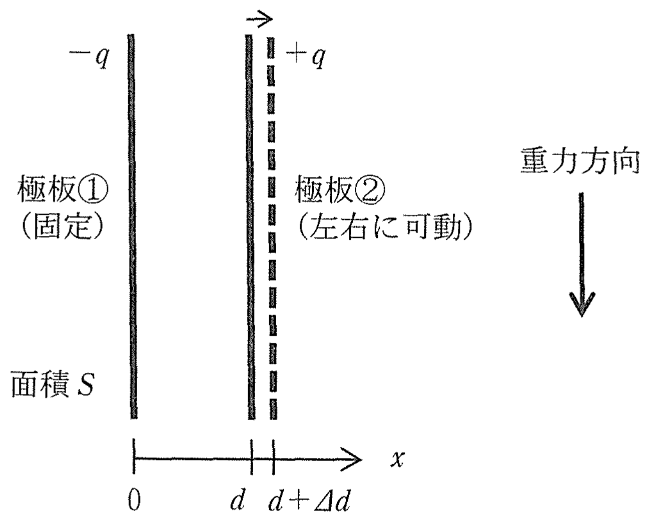

図1

極板①に垂直で極板②に向かう方向を x 軸とし，極板①の位置を $x = 0$，極板②の位置を $x = d$ とする($d > 0$)。このとき，コンデンサーに蓄えられているエネルギー W は $\boxed{\text{イ}}$ である。ここで，極板②を平行に保ったまま微小距離 Δd だけ極板①と反対方向に動かしたあとにコンデンサーに蓄えられているエネ

ルギー W' は $\boxed{\quad ロ \quad}$ である。このエネルギーの変化 $\varDelta W = W' - W$ は，極板①と極板②が引き合う力に逆らって動かしたために生じたものである。そこで，このエネルギーの変化から極板②に働く力 $F = \dfrac{\varDelta W}{\varDelta d}$ の大きさを求めると，$\boxed{\quad ハ \quad}$ となる。

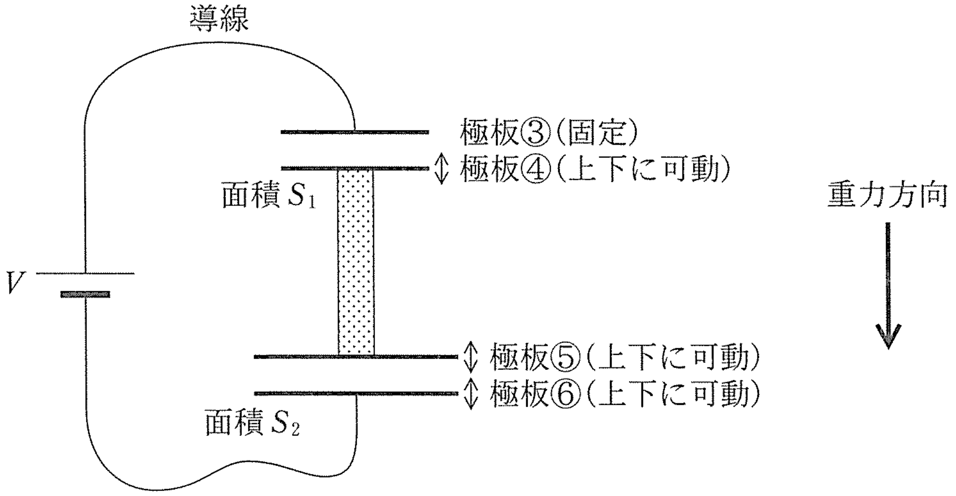

図 2

(2)　図 2 のように，極板③と極板④，および極板⑤と極板⑥からなる 2 つの平行板コンデンサーがある。極板③は固定されている。極板④と極板⑤は質量が無視できる導体の棒で接続されて一体化しており，極板を平行に保ったまま上下に滑らかに動かすことができるものとする。また，極板⑥も極板を平行に保ったまま他の極板と独立に上下に滑らかに動かすことができるものとする。図 2 のように 2 つのコンデンサーは直列に接続されており，電圧 V がかかっている。これら 2 つのコンデンサーは十分離れており，互いにクーロン力を及ぼさない。極板③と極板④の面積はともに S_1，極板⑤と極板⑥の面積はともに S_2，それぞれの極板の質量は面積に比例し，その比例定数を p とする($p > 0$)。2 つのコンデンサーの極板間距離をともに d とする。このとき，極板③と極板④が引き合う力の大きさは $\boxed{\quad ニ \quad}$ である。

いま，極板が引き合う力と重力が釣り合うように電圧 V を調整すると，2 つのコンデンサーの極板間距離がともに d となった状態で静止した。このとき，極板の面積 S_1 は S_2 の $\boxed{\quad ホ \quad}$ 倍であり，電圧 V は，極板の面積 S_1，S_2 を用いることなく $\boxed{\quad ヘ \quad}$ と表すことができる。

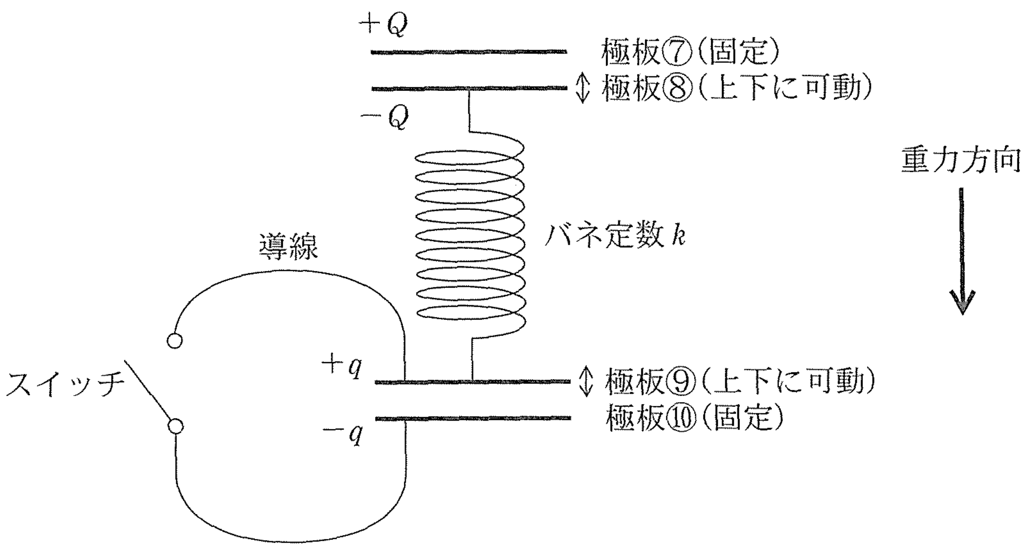

図 3

(3) 図 3 のように，極板⑦と極板⑧，および極板⑨と極板⑩からなる 2 つの平行板コンデンサーがある。極板⑦と極板⑩は固定されている。極板⑧と極板⑨は質量が無視できる絶縁体のバネで接続されており，極板を平行に保ったまま上下に滑らかに動かすことができるものとする。このバネのバネ定数は k である。2 つのコンデンサーは十分離れており，互いにクーロン力を及ぼさない。すべての極板の面積は S であり，質量を pS とする($p > 0$)。

いま，極板⑦，極板⑧にはそれぞれ $+Q$，$-Q$ の電荷が帯電しており，極板⑨，極板⑩にはそれぞれ $+q$，$-q$ の電荷が帯電しているものとする($Q > 0$，$q > 0$)。図中のスイッチは開いており，極板が引き合う力，重力，バネの力が釣り合ってすべての極板は静止している。また，2 つのコンデンサーの極板間距離をともに d とする。このときのバネの自然長からの伸びは，Q を使わずに表すと [ト] である。

次に，時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じると同時に，極板⑧が静止したまま極板⑨が単振動を始めるように q の値を選ぶとともに Q を時刻 t に応じて適切に制御した。この単振動の中心は極板⑨の最初の位置から [チ] だけ上方にあり，その振幅は [リ] である。また，振動の周期 T は [ヌ] である。

問 1　極板⑦と極板⑧の間には引力しか働かないため，極板⑨の振幅が大きい場合は極板⑧を静止させておくことができなくなる。極板⑨が単振動している間，Q を制御することで極板⑧を静止させておくことができる q の範囲を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

問 2　極板⑨が単振動している間，極板⑧を静止させておくための Q を時刻 t の関数 $Q(t)$ として求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

物理問題　III

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式か値を，{　　}からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ はすでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**，**問2** については，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1に示すように，ピストンWと仕切板Dによって内部の領域を分けられたシリンダーがある。シリンダーは固定されており，ピストンWと仕切板Dは摩擦なしに動くことができる。ピストンWと仕切板Dの間を領域Aとし，仕切板Dとシリンダー右端の間を領域Bとする。領域Aと領域Bには，異なる理想気体がそれぞれ密閉されている。定積モル比熱を C_V，気体定数を R とすると，領域Aと領域Bに密閉されている気体の $\dfrac{C_V}{R}$ の値は，それぞれ $\dfrac{3}{2}$ と $\dfrac{5}{2}$ である。シリンダーの外壁とピストン，仕切板は，すべて断熱材でできている。領域Bの気体は，シリンダーの右端に取り付けられた温度調整器Cによって加熱または冷却される。領域Bの気体全体の温度は，すみやかに温度調整器の設定温度になるものとする。なお，温度調整器の電源を切ると，領域Bは断熱環境となる。さらに，シリンダー内部にはストッパーSが設けられており，仕切板がストッパーより右側に動くことはない。仕切板がストッパーの位置にあるときの領域Bの体積は V_0 である。ピストン，仕切板，ストッパー，温度調整器の体積は無視できるものとする。また，ピストンの左側は常に大気圧となっており，その値は P_0 である。

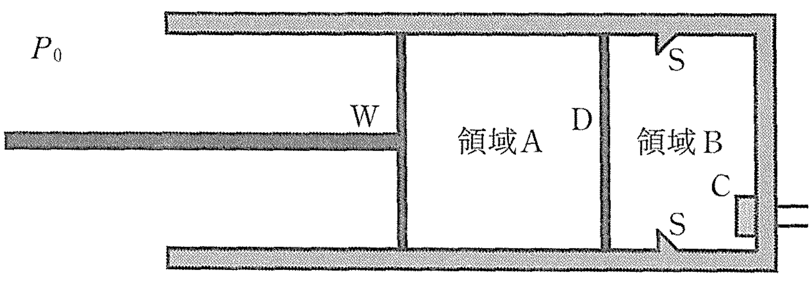

図1

最初，領域Aの気体の圧力，体積，温度は，それぞれP_0, $2V_0$, T_0であり，領域Bの気体の圧力，体積，温度は，それぞれP_0, $\frac{3}{2}V_0$, $\frac{3}{2}T_0$であった。この状態を初期状態とする。このとき領域Aの気体と，領域Bの気体のモル数はそれぞれ，$\boxed{\text{あ}}$ と $\boxed{\text{い}}$ である。初期状態から以下の(1)～(4)に示す操作を行った。

(1)　温度調整器で領域Bの気体を加熱し，温度を$\frac{3}{2}T_0$から$2T_0$までゆっくりと上昇させた。このとき，領域Bの気体の内部エネルギーの変化は $\boxed{\text{う}}$ であり，領域Bの気体がした仕事は $\boxed{\text{え}}$ であるから，領域Bの気体が温度調整器から吸収した熱量は $\boxed{\text{お}}$ である。

理想気体の断熱変化では，(圧力)×(体積)$^{\gamma}$は一定である。ここでγは比熱比と呼ばれ，定圧モル比熱をC_Pとすると，$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$で定義される。理想気体では，C_PとC_Vの差$(C_P - C_V)$が $\boxed{\text{か}}$ に等しいことを考慮すれば，領域Aの気体の比熱比は $\boxed{\text{き}}$ であり，領域Bの気体の比熱比は $\boxed{\text{く}}$ である。

なお，以下の解答では，領域Aの気体の比熱比 $\boxed{\text{き}}$ をα，領域Bの気体の比熱比 $\boxed{\text{く}}$ をβと表記せよ。

(2)　(1)で行った操作に引き続き，温度調整器で領域Bの気体の温度を$2T_0$に保ちながら，ピストンWに外力を加え，ゆっくりと右方へ押し込んでいった。仕切板DがストッパーSに接触したとき，ピストンWを押し込む操作を中断し，そのままの状態で保持した。このとき領域Aの気体の体積は $\boxed{\text{け}}$ である。

問 1　(2)で行った操作で，外力が気体にした仕事を求めよ。ただし，領域Bの気体が温度調整器を通じて外部に放出した熱量をQとする。導出の過程もあわせて示せ。

（3）（2）で行った操作に引き続き，さらにピストンWを押し込んでいくと，領域Aの気体の体積が V_0 となった。この時点でピストンWを押し込む操作を中断し，そのままの状態で保持した。このとき，領域Aの気体の圧力は $\boxed{\quad こ \quad}$ である。

問 2 （2）で行った操作の開始から（3）で行った操作の終了までの間において，領域Aの気体と領域Bの気体の状態変化を，横軸を体積，縦軸を圧力として図示せよ。また，領域Bの気体がされた仕事に相当する領域を図中に斜線で示せ。ただし，各操作の過程で状態の変化があるときは，変化の進む方向に矢印を付し，その変化の始状態と終状態における体積と圧力を図中に記入せよ。

（4）（3）の操作に引き続き，温度調整器で領域Bの気体を加熱した。仕切板Dがストッパーから離れかけた瞬間に温度調整器の電源を切り，領域Bを断熱環境とした。その後，領域Aの気体の圧力が大気圧 P_0 に等しくなるまで，ゆっくりとピストンWを左方に移動させた。このとき，領域Bの気体の体積は $\boxed{\quad さ \quad}$ であり，そのときの領域Aの気体の体積{し：①より大きい ②より小さい ③と等しい}。また，この過程で領域Aの気体のした仕事は，領域Bの気体がした仕事{す：①より大きい ②より小さい ③と等しい}。気体の仕事に関するこのような性質は，熱機関における効率を考える上で重要である。

物理問題は，このページで終わりである。